ISSN 2706-6266
ISSN 3007-1062
ISSN 3007-1070

МРНТИ 50.03.03, 27.37.17 **DOI: https://doi.org/10.62724/202420305**

**Грибков Алексей Николаевич*[1]**,
доктор технических наук, ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет», Российская Федерация, 392000, г. Тамбов, ул. Советская, д. 106/5, помещение 2, GribkovAlexey@yandex.ru, ORCID ID: 0000-0002-7267-0113

**Буранова Нурслу Галымовна[2]**,
ЧВПОУ «Западно-Казахстанский инновационно-технологический университет», Республика Казахстан, 090009, г. Уральск, ул. Ихсанова 44/1, nurslu_1986@mail.ru, ORCID ID: 0000-0003-0440-5948

# АНАЛИЗ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ОБЪЕКТОМ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПРИ НАЛИЧИИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

***Аннотация.*** В статье рассмотрены теоретические и практические аспекты анализа задачи оптимального управления объектом второго порядка при наличии случайных возмущений в виде «белого» гауссовского шума. Рассматривается задача оптимального управления для объекта, описываемого моделью двойного апериодического звена, при наличии несимметричных ограничений на управляющее воздействие, с закрепленными концами траектории изменения вектора фазовых координат, фиксированном временном интервале управления и функционале вида «минимум расхода топлива». Используется математический аппарат теории оптимального управления (принцип максимума Л.С. Понтрягина и метод синтезирующих переменных). Проведено исследование области существования решения задачи оптимального управления для заданных исходных данных при помощи аналитико-графического метода. Приведены аналитические зависимости для расчета параметров функции оптимального управления. Полученные результаты анализа задачи оптимального управления можно использовать при разработке алгоритмического обеспечения систем автоматического управления технологическими объектами и процессами, обеспечивающих синтез оптимальных управляющих воздействий в реальном масштабе времени.

***Ключевые слова.*** Оптимальное управление, принцип максимума Л.С. Понтрягина, метод синтезирующих переменных, двойное апериодическое звено, случайные возмущения.

Разработка и практическое применение систем оптимального управления технологическими объектами и процессами играет важную роль в современной промышленности, поскольку выгоды от внедрения таких систем могут быть весьма значительными. Они включают улучшение качества выпускаемой продукции, уменьшение потребления энергетических ресурсов, минимизацию материальных затрат, повышение уровней безопасности и сокращение загрязнения окружающей среды [1]. При этом, процесс разработки системы управления, во многих случаях, представляет собой сложную научно-техническую задачу, так как для создания алгоритмического обеспечения системы требуется применение достаточно сложного математического аппарата.

Одним из важнейших и весьма трудоемких этапов разработки алгоритмического обеспечения системы управления является анализ задачи оптимального управления (ЗОУ) применительно к конкретному технологическому объекту. Анализ ЗОУ непосредственно связан с исследованием вопросов существования решения, ус-

ISSN 2706-6266
ISSN 3007-1062
ISSN 3007-1070

тойчивости, определения возможных видов функций оптимального управления и др. [2]. Важной особенностью анализа ЗОУ является учет влияния случайных возмущений, действующих на объект управления.

В статье рассмотрены особенности анализа ЗОУ для объекта, динамика которого описывается моделью в виде дифференциального уравнения второго порядка (двойное апериодическое звено) при наличии случайных возмущений в виде «белого» гауссовского шума. При анализе ЗОУ использовался принцип максимума Л.С. Понтрягина [3] и метод синтезирующих переменных [4].

Рассмотрим математическую постановку ЗОУ объектом, динамика которого описывается моделью вида «двойное апериодическое звено»

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2(t), \\ \dot{z}_2 = a_1 z_1(t) + a_2 z_2(t) + b(u(t) + \psi(t)); \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} z_1(t_0) = z_{10} \to z_1(t_к) = z_{1к}, \\ z_2(t_0) = z_{20} \to z_2(t_к) = z_{2к}; \end{aligned} \tag{2}$$

$$\forall t \in [t_0, t_к]: u(t) \in [u_н, u_в]; \tag{3}$$

$$J_т = \int_{t_0}^{t_к} |u(t)| dt \to \min_u, \tag{4}$$

где: $a_1, a_2, b$ – параметры модели; $z_1(t), z_2(t)$ – фазовые координаты; $u(t)$ – управляющее воздействие; $\psi(t)$ – «белый» гауссовский шум с нулевым математическим ожиданием и среднеквадратическим отклонением $\sigma_\psi$; $z_{10}, z_{20}, z_{1к}, z_{2к}$ – начальные и конечные значения фазовых координат; $u_н, u_в$ – нижнее и верхнее граничные значения управляющего воздействия, $J_т$ – минимизируемый функционал.

Массив исходных данных, необходимый для численного решения задачи (1)-(4) имеет следующий вид

$$R = \{a_1, a_2, b, z_{10}, z_{1к}, z_{20}, z_{2к}, u_н, u_в, t_0, t_к.\sigma_\psi\}. \tag{5}$$

Для решения сформулированной задачи неоходимо для заданного массива исходных данных (5) определить оптимальные значения управляющего воздействия $u(t)$, при которых для модели (1), с учетом условий (2) и ограничений (3), достигается минимум функционала (4).

ЗОУ (1)-(4) имеет следующие характерные особенности:

– траектория изменения вектора фазовых координат с закрепленными концами;
– наличие ограничений на управляющее воздействие;
– фиксированный временной интервал управления;
– функционал вида «минимум расхода топлива»;
– наличие возмущающих воздействий вида «белый» шум.

Следует отметить, что в сформулированной ЗОУ ограничения на управляющее воздействие, задаваемые формулой (3), могут быть симметричными и несимметричными ($|u_н| \neq u_в$). ЗОУ с симметричными ограничениями на управляющее воздействие, как правило, рассматривается при управлении движущимися объектами, а с нессиметричными – при управлении стационарными объектами. В дальнейшем, при

ISSN 2706-6266
ISSN 3007-1062
ISSN 3007-1070

выполнении анализа ЗОУ (1)-(4) будем рассматривать случай с несимметричными ограничениями ($u_н = 0$).

Условие существования решения ЗОУ для заданного массива исходных данных $R$, можно определить при помощи метода синтезирующих переменных, в соответствии с которым производится нормирование исходной задачи (1)-(4) и вводится вектор синтезирующих переменных $\Lambda$, размерность которого значительно меньше размерности массива $R$. Вектор $\Lambda$ однозначно определяет вид и параметры функции оптимального управления, а его компоненты зависят от значений компонентов массива $R$ [2].

В нормированной ЗОУ временной интервал, область допустимых значений $u(t)$ и $\psi(t)$ постоянны, т.е.

$$\begin{gathered} t \in [t_0, t_к] \to T \in [0,2], \\ u(t) \in [u_н = 0, u_в] \to U(T) \in [0,1], \\ \psi(t) \in [\psi_н = -3\sigma_\psi, \psi_в = 3\sigma_\psi] \to \Psi(T) \in [-1,1], \end{gathered} \tag{6}$$

следует заметить, что области допустимых значений временного интервала и управляющего воздействия берутся из условий задачи (1)-(4), а шума – в соответствии с правилом «трех сигм», поскольку «белый» гауссовский шум представляет собой случайную величину, распределенную по нормальному закону.

Запишем ЗОУ (1)-(4) в нормированном виде

$$\begin{gathered} \begin{cases} \dot{Z}_1 = Z_2(T), \\ \dot{Z}_2 = \bar{a}_1 Z_1(T) + \bar{a}_2 Z_2(T) + \bar{b}_u U(T) + \bar{b}_\psi \Psi(T) + \bar{b}_0, \end{cases} \\ Z_1(0) = z_{10} \to Z_1(2) = z_{1к}, \\ Z_2(0) = z_{20} \to Z_2(2) = z_{2к}, \\ \forall T \in [0,2]: U(T) \in [0,1], \Psi(T) \in [-1,1], \\ J_т = \int_0^2 |U(T)| dT \to \min_U, \end{gathered} \tag{7}$$

где $Z_1(T), Z_2(T)$ – нормированные значения фазовых координат $z_1(t), z_2(t)$.

Параметры модели объекта для нормированной задачи (7) рассчитываются по следующим формулам

$$\begin{gathered} \bar{a}_1 = a_1 \frac{t_к - t_0}{2}, \ \bar{a}_2 = a_2 \frac{t_к - t_0}{2}, \\ \bar{b}_u = b \frac{(t_к - t_0)(u_в - u_н)}{2}, \ \bar{b}_\psi = b \frac{(t_к - t_0)(\psi_в - \psi_н)}{2}, \ \bar{b}_0 = b \frac{(u_н - u_в)(t_к - t_0)}{4}. \end{gathered}$$

Запишем решение нормированной задачи (7) в матричном виде (формула Коши)

$$Z(T) = e^{\bar{A}T} Z(0) + \int_0^T e^{\bar{A}(T-S)} \left[\bar{B}_u U(S) + \bar{B}_\psi \Psi(S) + \bar{B}_0\right] dS, \tag{8}$$

ISSN 2706-6266
ISSN 3007-1062
ISSN 3007-1070

$$Z(T)=\begin{pmatrix} Z_1(T) \\ Z_2(T) \end{pmatrix},\ \bar{A}=\begin{pmatrix} 0 & \bar{a}_0 \\ \bar{a}_1 & \bar{a}_2 \end{pmatrix},\ \bar{a}_0=\frac{t_к-t_0}{2},\ \bar{B}_u=\begin{pmatrix} 0 \\ \bar{b}_u \end{pmatrix},\ \bar{B}_\psi=\begin{pmatrix} 0 \\ \bar{b}_\psi \end{pmatrix},\ \bar{B}_0=\begin{pmatrix} 0 \\ \bar{b}_0 \end{pmatrix},$$

где $e^{\bar{A}T}$ – матричная экспонента (матрица фундаментальных решений), которая для задачи (7) при $a_2^2+4a_1>0$ имеет вид

$$e^{\bar{A}T}=\begin{pmatrix} \dfrac{\bar{\lambda}_1 e^{\bar{\lambda}_2 T}-\bar{\lambda}_2 e^{\bar{\lambda}_1 T}}{\bar{\lambda}_1-\bar{\lambda}_2} & \dfrac{\bar{a}_0\left(e^{\bar{\lambda}_1 T}-e^{\bar{\lambda}_2 T}\right)}{\bar{\lambda}_1-\bar{\lambda}_2} \\ \dfrac{\bar{a}_1\left(e^{\bar{\lambda}_1 T}-e^{\bar{\lambda}_2 T}\right)}{\bar{\lambda}_1-\bar{\lambda}_2} & \dfrac{\bar{\lambda}_1 e^{\bar{\lambda}_1 T}-\bar{\lambda}_2 e^{\bar{\lambda}_2 T}}{\bar{\lambda}_1-\bar{\lambda}_2} \end{pmatrix},\ \bar{\lambda}_1=\frac{\bar{a}_2}{2}+\sqrt{\frac{\bar{a}_2^2}{4}+\bar{a}_0\bar{a}_1},\ \bar{\lambda}_2=\frac{\bar{a}_2}{2}-\sqrt{\frac{\bar{a}_2^2}{4}+\bar{a}_0\bar{a}_1}.$$

Таким образом, формула (8) для конечного значения фазовых координат запишется следующим образом

$$\begin{pmatrix} z_{1к} \\ z_{2к} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{\bar{\lambda}_1 e^{2\bar{\lambda}_2}-\bar{\lambda}_2 e^{2\bar{\lambda}_1}}{\bar{\lambda}_1-\bar{\lambda}_2} & \dfrac{\bar{a}_0\left(e^{2\bar{\lambda}_1}-e^{2\bar{\lambda}_2}\right)}{\bar{\lambda}_1-\bar{\lambda}_2} \\ \dfrac{\bar{a}_1\left(e^{2\bar{\lambda}_1}-e^{2\bar{\lambda}_2}\right)}{\bar{\lambda}_1-\bar{\lambda}_2} & \dfrac{\bar{\lambda}_1 e^{2\bar{\lambda}_1}-\bar{\lambda}_2 e^{2\bar{\lambda}_2}}{\bar{\lambda}_1-\bar{\lambda}_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_{10} \\ z_{20} \end{pmatrix}+$$

$$+\int_0^2 \begin{pmatrix} \dfrac{\bar{\lambda}_1 e^{\bar{\lambda}_2(2-S)}-\bar{\lambda}_2 e^{\bar{\lambda}_1(2-S)}}{\bar{\lambda}_1-\bar{\lambda}_2} & \dfrac{\bar{a}_0\left(e^{\bar{\lambda}_1(2-S)}-e^{\bar{\lambda}_2(2-S)}\right)}{\bar{\lambda}_1-\bar{\lambda}_2} \\ \dfrac{\bar{a}_1\left(e^{\bar{\lambda}_1(2-S)}-e^{\bar{\lambda}_2(2-S)}\right)}{\bar{\lambda}_1-\bar{\lambda}_2} & \dfrac{\bar{\lambda}_1 e^{\bar{\lambda}_1(2-S)}-\bar{\lambda}_2 e^{\bar{\lambda}_2(2-S)}}{\bar{\lambda}_1-\bar{\lambda}_2} \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ \bar{b}_u \end{pmatrix}U(S)+\begin{pmatrix} 0 \\ \bar{b}_\psi \end{pmatrix}\Psi(S)+\begin{pmatrix} 0 \\ \bar{b}_0 \end{pmatrix}\right]dS.$$

На основе решения нормированной задачи вводится вектор синтезирующих переменных

$$\Lambda=(L_1,L_2)^{\mathrm{T}},$$

$$L_1=\frac{\left(L_2^{/}-\bar{\lambda}_2 L_1^{/}\right)e^{-2\bar{\lambda}_1}}{\bar{\lambda}_1-\bar{\lambda}_2}=\int_0^2 e^{-\bar{\lambda}_1 S}\left[U(S)+\frac{\bar{b}_\psi}{\bar{b}_u}\Psi(S)\right]dS, \tag{9}$$

$$L_2=\frac{\left(L_2^{/}-\bar{\lambda}_1 L_1^{/}\right)e^{-2\bar{\lambda}_2}}{\bar{\lambda}_1-\bar{\lambda}_2}=\int_0^2 e^{-\bar{\lambda}_2 S}\left[U(S)+\frac{\bar{b}_\psi}{\bar{b}_u}\Psi(S)\right]dS, \tag{10}$$

$$L_1^{/}=\frac{1}{\bar{a}_0\bar{b}_u}\left[\left(\bar{\lambda}_1-\bar{\lambda}_2\right)z_{1к}-\left(\bar{\lambda}_1 e^{2\bar{\lambda}_2}-\bar{\lambda}_2 e^{2\bar{\lambda}_1}\right)z_{10}-\bar{a}_0\left(e^{2\bar{\lambda}_1}-e^{2\bar{\lambda}_2}\right)z_{20}-\bar{a}_0\bar{b}_0\left(\frac{e^{2\bar{\lambda}_1}-1}{\bar{\lambda}_1}-\frac{e^{2\bar{\lambda}_2}-1}{\bar{\lambda}_2}\right)\right],$$

$$L_2^{/}=\frac{1}{\bar{b}_u}\left[\left(\bar{\lambda}_1-\bar{\lambda}_2\right)z_{2к}-\bar{a}_1\left(e^{2\bar{\lambda}_1}-e^{2\bar{\lambda}_2}\right)z_{10}-\left(\bar{\lambda}_1 e^{2\bar{\lambda}_1}-\bar{\lambda}_2 e^{2\bar{\lambda}_2}\right)z_{20}-\bar{b}_0\left(e^{2\bar{\lambda}_1}-e^{2\bar{\lambda}_2}\right)\right].$$

Область значений вектора $\Lambda$, для которых задача (1)-(4) имеет решение при функции управления $u(t)$, называется областью существования решения ЗОУ [2]. Графическое представление области существования решения ЗОУ в пространстве синтезирующих переменных показано на рисунке 1.

ISSN 2706-6266
ISSN 3007-1062
ISSN 3007-1070

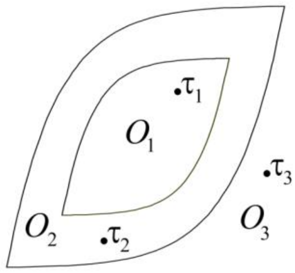


Рисунок 1 – Область существования решения ЗОУ
в пространстве синтезирующих переменных

На области существования решения ЗОУ можно выделить следующие области: $O_1$ – область гарантированного существования решения ЗОУ, $O_2$ – область, в которой возможность существования решения ЗОУ определяется случайным характером влияния возмущения, $O_3$ – область, в которой решение ЗОУ не существует.

Таким образом, можно получить условие существования решения ЗОУ в зависимости от значений массива исходных данных *R*. Оно определяется положением точки с координатами $[L_1, L_2]$ в области существования решения ЗОУ. Проверка существования решения осуществляется следующим образом:

1. Если $[L_1, L_2] \in O_1$ – решение ЗОУ существует (точка $\tau_1$).

2. Если $[L_1,\ L_2] \in O_2$ – возможность существования решения ЗОУ определяется случайным характером влияния возмущения (точка $\tau_2$).

3. Если $[L_1,\ L_2] \in O_3$ – решение ЗОУ не существует (точка $\tau_3$).

При практическом исследовании области существования решения ЗОУ для конкретного объекта можно по результатам анализа сформулировать требования, касающиеся помехоустойчивости алгоритмов синтеза управляющих воздействий. Например, если возможность существования решения ЗОУ в значительной степени зависит от влияния случайных возмущений, то для повышения вероятности достижения цели управления необходимо применять специальные помехоустойчивые алгоритмы [6].

Рассмотрим задачу определения возможных видов функций оптимального программного управления и расчета их параметров для задачи (1)-(4). Основным методом определения видов функций оптимального управления является принцип максимума Л.С. Понтрягина.

Гамильтониан (функционал Понтрягина) применительно к задаче (1)-(4) имеет вид

$$H = -|u| + \varphi_1 z_1 + \varphi_2 (a_1 z_1 + a_2 z_2 + b(u + \psi)), \tag{11}$$

где $\varphi_1, \varphi_2$ – непрерывные функции (импульсы), определяющие вид функции оптимального управления.

Как видно из (11), вид функции оптимального управления определяется характером изменения зависимости $b\varphi_2$ и границами для управляющего воздействия, т.е.

$$u^*(t) = \begin{cases} u_{\text{в}}, & \text{если } b\varphi_2 > 1, \\ 0, & \text{если } b\varphi_2 < 1. \end{cases}$$

ISSN 2706-6266
ISSN 3007-1062
ISSN 3007-1070

$$u^*(t) \in [0, u_в], \text{ если } b\varphi_2 = 1.$$

В качестве примера рассмотрим следующий вид функции управления: [5]

$$u^*(t) = \begin{cases} \gamma_1, & t \in [t_0, t_1), \\ \gamma_2, & t \in [t_1, t_2), \\ \gamma_3, & t \in [t_2, t_к], \end{cases}$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in [0, u_в]$ – заданные значения управляющего воздействия (не меняющиеся на временном интервале управления); $t_1, t_2$ – параметры функции оптимального управления (времена переключения).

Соотношения для расчета времен переключения можно определить, решив следующую систему, относительно нормированных значений $T_1, T_2$

$$\begin{cases} L_1 = \int\limits_0^{T_1} e^{-\bar{\lambda}_1 S} \gamma_1\, dS + \int\limits_{T_1}^{T_2} e^{-\bar{\lambda}_1 S} \gamma_2\, dS + \int\limits_{T_2}^{2} e^{-\bar{\lambda}_1 S} \gamma_3\, dS, \\ L_2 = \int\limits_0^{T_1} e^{-\bar{\lambda}_2 S} \gamma_1\, dS + \int\limits_{T_1}^{T_2} e^{-\bar{\lambda}_2 S} \gamma_2\, dS + \int\limits_{T_2}^{2} e^{-\bar{\lambda}_2 S} \gamma_3\, dS. \end{cases}$$

а затем можно перейти от $T_1, T_2$ к $t_1, t_2$ по формуле

$$t_i = \frac{t_к - t_0}{2} T_i + t_0, i = 1,2 .$$

В статье рассмотрены особенности анализа ЗОУ объектом, описываемым моделью второго порядка при наличии случайных возмущений в виде «белого» гауссовского шума. Рассмотренный подход можно использовать при разработке алгоритмического обеспечения систем автоматического управления технологическими объектами и процессами, обеспечивающих синтез оптимальных управляющих воздействий в реальном масштабе времени. В частности, данный подход применялся при проектировании систем управления динамическими режимами теплотехнологических аппаратов (барабанных и вальце-ленточных сушильных установок) [5, 7].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Гудвин, Г.К. Проектирование систем управления [Текст] / Г.К. Гудвин, С.Ф. Гребе, М.Э. Сальгадо. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. – 911 с.

2 Муромцев, Д.Ю. Методы и алгоритмы синтеза энергосберегающего управления технологическими объектами: монография [Текст] / Д.Ю. Муромцев. – Тамбов; М.: СПб., Баку; Вена: Нобелистика, 2005. – 202 с.

3 Понтрягин, Л.С. Математическая теория оптимальных процессов [Текст] / Л.С. Понтрягин [и др.]. – М.: Наука, 1969. – 384 с.

4 Муромцев, Ю.Л. Метод синтезирующих переменных при оптимальном управлении линейными объектами [Текст] / Ю.Л. Муромцев, Л.Н. Ляпин, Е.В. Сатина // Приборостроение: Изв. вузов. – 1993. - №11-12. – С.19-25.

5 Грибков, А.Н. Информационно-управляющие системы многомерными

ISSN 2706-6266
ISSN 3007-1062
ISSN 3007-1070

технологическими объектами: теория и практика [Текст]: монография / А.Н. Грибков, Д.Ю. Муромцев. – Тамбов: Изд-во ФГБОУ ВО «ТГТУ», 2016. – 164 с.

6 Грибков, А.Н. Метод исследования области существования решения задачи оптимального управления при наличии случайных возмущений [Текст] / А.Н. Грибков [и др.] // Вестник Тамбовского государственного технического университета. – 2012. – Т.18. – №2. – С. 345–349.

7 Артемова, С.В. Методология проектирования интеллектуальной информационно-управляющей системы тепло-технологическими аппаратами [Текст]: монография / С.В. Артемова, А.А. Артемов, М.А. Каменская. – Тамбов: Изд-во ФГБОУ ВО «ТГТУ», 2017. – 196 с.

## REFERENCES

1 Gudvin, G.K. "Proektirovanie sistem upravleniya [Design of control systems].” M.: BINOM. Laboratoriya znanij, (2010): – 911 s. - (In Rus)

2 Muromcev, D.YU. “Metody i algoritmy sinteza energosberegayushchego upravleniya tekhnologicheskimi ob"ektami [Methods and algorithms for the synthesis of energy-saving management of technological facilities].” monografiya Tambov, M.; SPb.; Baku; Vena: Nobelistika, (2005): – 202 s. - (In Rus)

3 Pontryagin, L.S. “Matematicheskaya teoriya optimal'nyh processov [Mathematical theory of optimal processes].” M.: Nauka,(1969): – 384 s. - (In Rus)

4 Muromcev, YU.L. “Metod sinteziruyushchih peremennyh pri optimal'nom upravlenii linejnymi ob"ektami [The method of synthesizing variables for optimal control of linear objects].” Priborostroenie: Izv. vuzov, (1993): – №11-12. 19-25 s. - (In Rus)

5 Gribkov, A.N. “Informacionno-upravlyayushchie sistemy mnogomernymi tekhnologicheskimi ob"ektami: teoriya i praktika [Information and control systems for multidimensional technological objects: theory and practice].” monografiya Tambov: Izd-vo FGBOU VO «TGTU», (2016): – 164 s. - (In Rus)

6 Gribkov, A.N. “Metod issledovaniya oblasti sushchestvovaniya resheniya zadachi optimal'nogo upravleniya pri nalichii sluchajnyh vozmushchenij [A method for investigating the field of existence of a solution to the optimal control problem in the presence of random disturbances].” Vestnik Tambovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta, (2012): – T.18. – №2. – 345-349 s. - (In Rus)

7 Artemova, S.V. Metodologiya proektirovaniya intellektual'noj informacionno-upravlyayushchej sistemy teplo-tekhnologicheskimi apparatami [Methodology of designing an intelligent information and control system for heat and technological devices]. monografiya Tambov: Izd-vo FGBOU VO «TGTU», (2017): – 196 s. - (In Rus)

## КЕЗДЕЙСОҚ БҰЗЫЛУЛАР БОЛҒАН КЕЗДЕ ЕКІНШІ РЕТТІ ОБЪЕКТІНІ ОҢТАЙЛЫ БАСҚАРУ МӘСЕЛЕСІН ТАЛДАУ

***Аңдатпа.*** Мақалада "ақ" гаусс шуы түріндегі кездейсоқ бұзылулар болған кезде екінші ретті объектіні оңтайлы басқару мәселесін талдаудың теориялық және практикалық аспектілері қарастырылады. Фазалық координаталар векторының өзгеру траекториясының бекітілген ұштары, басқарудың белгіленген уақыт аралығы және "отын шығынының минимумы" түрінің функционалы бар басқару әсеріне асимметриялық шектеулер болған кезде қос апериодтық буын моделімен сипатталатын объект үшін оңтайлы басқару міндеті қарастырылады. Оңтайлы басқару теориясының математикалық аппараты қолданылады (Л.С. Понтрягиннің максимум принципі және синтездік айнымалылар әдісі). Аналитикалық-графикалық әдісті қолдана отырып,

ISSN 2706-6266
ISSN 3007-1062
ISSN 3007-1070

берілген бастапқы мәліметтер үшін оңтайлы басқару мәселесін шешудің саласы зерттелді. Оңтайлы басқару функциясының параметрлерін есептеу үшін аналитикалық тәуелділіктер берілген. Оңтайлы басқару мәселесін талдаудың алынған нәтижелерін нақты уақыт шкаласында оңтайлы басқару әсерлерінің синтезін қамтамасыз ететін технологиялық объектілер мен процестерді автоматты басқару жүйелерін алгоритмдік қамтамасыз етуді әзірлеу кезінде пайдалануға болады.

***Кілт сөздер.*** Оңтайлы басқару, Л. С. Понтрягиннің максимум принципі, синтездік айнымалылар әдісі, қос апериодтық байланыс, кездейсоқ бұзылулар.

## ANALYSIS OF THE PROBLEM OF OPTIMAL CONTROL OF A SECOND-ORDER OBJECT IN THE PRESENCE OF RANDOM DISTURBANCES

***Abstract.*** The article discusses the theoretical and practical aspects of analyzing the problem of optimal control of a second-order object in the presence of random disturbances in the form of "white" Gaussian noise. The problem of optimal control for an object described by the model of a double aperiodic link is considered, in the presence of asymmetric restrictions on the control action, with fixed ends of the trajectory of the change in the vector of phase coordinates, a fixed time interval of control and a functional of the type "minimum fuel consumption". The mathematical apparatus of the theory of optimal control is used (the maximum principle of L.S. Pontryagin and the method of synthesizing variables). The study of the existence of a solution to the optimal control problem for given initial data using the analytical and graphical method is carried out. Analytical dependences for calculating the parameters of the optimal control function are given. The obtained results of the analysis of the optimal control problem can be used in the development of algorithmic support for automatic control systems for technological objects and processes that ensure the synthesis of optimal control actions in real time.

***Key words.*** Optimal control, L.S. Pontryagin's maximum principle, method of synthesizing variables, double aperiodic link, random disturbances.